7/5/2018

ΠΟΡΙΣΜΑ Έστω $n \geq 2$, $\sigma \in S_n$ και $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ η διαμέριση του n που αντιστοιχεί στο σ. Τότε $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{a_1 - 1} \cdot (-1)^{a_2 - 1} \cdots (-1)^{a_r - 1}$ και $\sigma \in A_n$ αν και μόνο αν $\varepsilon(\sigma) = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $n=6$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$

$(1) \circ (2,4,3) \circ (5,6)$. Άρα η διαμέριση του 6 που αντιστοιχεί στο σ είναι η $(1,2,3)$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^0 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^2 = -1$, άρα $\sigma \notin A_6$

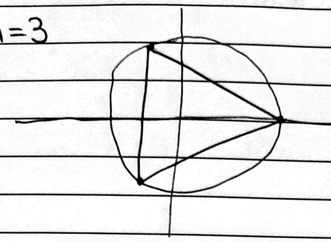
Διεδρικές ομάδες $D_n \leq S_n$ για $n \geq 3$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 Έστω $n \geq 3$. Ορίζουμε τα σημεία $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ με $P_i = \left(\cos \frac{2\pi i}{n}, \sin \frac{2\pi i}{n} \right)$, $i = 1, 2, \ldots n$

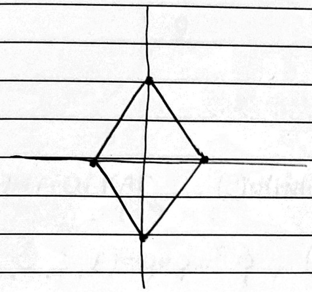
Κανονικό n-γωνο στο $\mathbb{R}^2$ είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που προκύπτει σαν ένωση των ευθ. τμημάτων που ενώνουν τα P_i με P_{i+1}, για $i \leq n-1$ και το P_n με το P_1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$n=3$ ισόπλ. 3-γωνο



$n=4$ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ



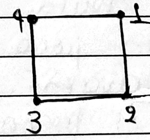
ΟΡΙΣΜΟΣ (Όχι αυστηρός)

Έστω $n \geq 3$ $D_n = \{$ στερεές κινήσεις του $\mathbb{R}^2$ που απεικονίζουν το κανονικό n-γωνο στον εαυτό του$\}$

Το D_n αποτελεί ομάδα με πράξη την σύνθεση

Με φυσιολογικό τρόπο η D_n είναι υποομάδα της S_n με $|D_n| = 2n$ και θα μελετήσουμε D_3, D_4, D_5, D_6.

Παράδειγμα 1 $D_4 \subseteq S_4$



$D_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \underset{\text{στροφή}}{\rho} = (1,2,3,4), \rho^2 = \rho\circ\rho = (1,3)\circ(2,4), \right.$

(διαγώνιο)

$\rho^3 = (1,4,3,2)$, $(2,4)$ = ανάκλαση ως προς ευθεία που ενώνει 1 και 3

$(1,3)$ = ανάκλαση ως προς ευθεία (διαγώνιο) που ενώνει 2 και 4

$(1,4)\circ(2,3)$ = ανάκλαση ως προς ευθεία που ενώνει τα μέσα των πλευρών 1,4 και 2,3.

$(1,2)\circ(3,4)$ = ανάκλαση ως προς ευθεία που ενώνει τα μέσα των πλευρών 1,2 και 3,4 $\}$

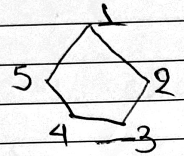
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ D_4 υποομάδα της S_4 και $|D_4| = 8$

D_4 ΟΧΙ ΑΒΕΛΙΑΝΗ, γιατί

$(1,2,3,4) \circ (1,3) = (1,4) \circ (3,2)$

$(1,3) \circ (1,2,3,4) = (1,2) \circ (3,4)$

Παράδειγμα 2 D_5



$D_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1)\circ(2)\circ(3)\circ(4)\circ(5) \right.$ ΤΑΥΤΟΤΙΚΗ

στροφές: $\rho = (1,2,3,4,5)$, $\rho^2 = \rho\circ\rho = (1,3,5,2,4)$

$\rho^3 = \rho\circ\rho\circ\rho = (1,4,2,5,3)$ $\rho^4 = (1,5,4,3,2)$

ανακλάσεις: $(2,5)\circ(3,4)$ ανάκλαση ως προς ευθεία που ενώνει το 1 με το μέσο της απέναντι πλευράς.

$(1,3)\circ(4,5)$ ανάκλαση ως προς ευθεία που ενώνει το 2 με το μέσο της απέναντι πλευράς

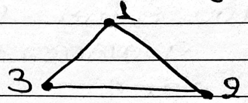
$(1,5)\circ(2,4)$ ανακλ. ως προς ευθεία που ενώνει το 3 με το μέσο της απέναντι πλευράς.

$(1,2)\circ(3,5)$ ανακλ. ως προς την ευθεία που ενώνει το 4 με το μέσο της απεν. πλευράς.

$(1,4)\circ(2,3)$ ανακλ. ως προς την ευθεία που ενώνει το 5 με το μέσο της απεν. πλευράς

Η D_5 είναι υποομάδα της S_5 με τάξη $10 = 2\cdot 5$.

Παράδειγμα 3 D_3

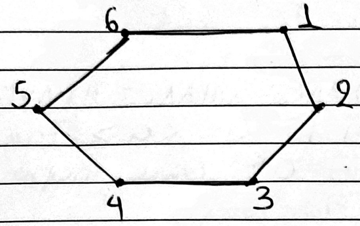


$D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)\circ(2)\circ(3) = \right.$ ΤΑΥΤΟΤΙΚΗ,

Στροφές: $\rho=(1,2,3)$, $\rho^2=\rho\circ\rho=(1,3,2)$
Ανακλάσεις: $(2,3)$, $(1,3)$, $(1,2)\}$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ $D_3=S_3$ και $|D_3|=6$.

Παράδειγμα 4 D_6



$D_6=\Big\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$ = ταυτοτική,

στροφές: $\rho=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$,

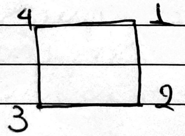
$\rho^2=(1\ 3\ 5)\circ(2\ 4\ 6)$, $\rho^3=(1,4)\circ(2,5)\circ(3,6)$,
$\rho^4=(1,5,3)\circ(2,6,4)$, $\rho^5=\rho^{-1}=(6,5,4,3,2,1)$

Ανακλάσεις ως προς ευθεία που ενώνει απέναντι κορυφές
$(2,6)\circ(3,5)$, $(1,3)\circ(4,6)$, $(1,5)\circ(2,4)$
Ανακλάσεις ως προς ευθεία που ενώνει μέσα απέναντι πλευρών: $(1,2)\circ(3,6)\circ(4,5)$, $(1,4)\circ(2,3)\circ(5,6)$,
$(1,6)\circ(3,4)\circ(2,5)\Big\}$

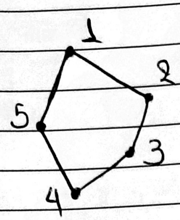
Άρα η D_6 έχει 12 στοιχεία. $|D_6|=12$.

Παρατήρηση Δείξαμε D_4 όχι αβελιανή. Έχουμε $D_3=S_3$ άρα όχι αβελιανή. Εύκολα δείχνει κανείς ότι D_n όχι αβελιανή για κάθε $n\geq 3$.

Παρατήρηση 1) D_4 $\rho=(1,2,3,4)$ $\sigma=(2,4)$



Τότε α) $|D_4|=8$ και
β) $D_4=\{\rho,\rho^2,\rho^3,\rho^4=e,\ \rho\circ\sigma,\rho^2\circ\sigma,\rho^3\circ\sigma,$ (οι 4 ανακλ. της D_4)
$\rho^4\circ\sigma=\sigma\}$
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εύκολη άσκηση.

2) 

D_5 $\rho = (1,2,3,4,5)$ $\sigma = (3,4)\circ(2,5)$

Τότε α) $|D_5| = 10$

β) $D_5 = \{\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5 = e, \rho\circ\sigma, \rho^2\circ\sigma, \rho^3\circ\sigma, \rho^4\circ\sigma, \rho^5\circ\sigma = \sigma\}$

<u>Παρατήρηση</u> Γενικά για κάθε $n \geq 3$ ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα.

ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ, ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ, ΟΜΑΔΕΣ ΠΗΛΙΚΟ.

<u>Πρόταση</u> Έστω G άπειρη κυκλική με $G = \langle a \rangle$. Τότε η απεικόνιση $\phi : (\mathbb{Z}, +) \to G$ $\phi(k) = a^k$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> <u>Βήμα 1ο</u> ϕ ομομ. ομάδων $\phi(k_1 + k_2) = a^{k_1+k_2} = a^{k_1} + a^{k_2} = \phi(k_1) * \phi(k_2)$

<u>Βήμα 2ο</u> ϕ ΕΠΙ. Προφανές από ορισμό $\langle a \rangle = \{a^e : e \in \mathbb{Z}\}$

<u>Βήμα 3ο</u> ϕ 1-1 Πράγματι αφού G άπειρη κυκλική έχουμε δείξει $a^{k_1} = a^{k_2} \Leftrightarrow k_1 = k_2$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $n \geq 2$ και $G = \langle a \rangle$ πεπερ. κυκλική τάξης n. Τότε η απεικόνιση $\phi : (\mathbb{Z}_n, +) \to G$ $\phi([k]_n) = a^k$ είναι καλά ορισμένη και ισομορφισμός ομάδων.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> α) καλά ορισμένη. Έστω $k, k' \in \mathbb{Z}$ με $[k]_n = [k']_n$ $\Rightarrow n \mid k - k' \Rightarrow a^{k-k'} = e_G \Rightarrow a^k = a^{k'}$ στην G.

Άρα ϕ καλά ορισμένη.

β) Ομομορφισμός ομάδων 1-1 και επί. Όπως στην προηγούμενη πρόταση.

<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</u> Έστω G_1, G_2 δύο κυκλικές ομάδες. Αν $|G_1| \neq |G_2|$ τότε οι G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφες, γιατί ισόμορφες ομάδες έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Αν όμως $|G_1| = |G_2| = \infty$ είναι ισόμορφες μεταξύ τους γιατί και οι δύο είναι ισόμορφες με το $(\mathbb{Z}, +)$. Επίσης αν $|G_1| = |G_2| = n < \infty$, τότε είναι

ισόμορφες μεταξύ τους γιατί και οι δύο είναι
ισόμορφες με το $(\mathbb{Z}_n,+)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω G ομάδα και N υποομάδα της G.
Η N λέγεται ΚΑΝΟΝΙΚΗ υποομάδα της G αν
$aN=Na$ για κάθε $a\in G$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω N υποομάδα της G. Η N είναι
κανονική αν και μόνο αν $a\in G$, $b\in N \Rightarrow$
$aba^{-1}\in N$.

Απόδειξη Έστω N κανονική $a\in G$, $b\in N$. Τότε
$ab\in aN=Na$. Άρα υπάρχει $b'\in G$ με $ab=b'a$
$\Rightarrow aba^{-1}\in N$. Αντίστροφα, έστω $a\in G$, $b\in N \Rightarrow$
$aba^{-1}\in N$ (*). Έστω $a\in G$. Θα δείξουμε $aN\subseteq Na$.
Έστω $b\in N$. Από (*) υπάρχει $b'\in N$ με $aba^{-1}=b' \Rightarrow$
$ab=b'a \Rightarrow ab\in Na \Rightarrow aN\subseteq Na$. Τώρα θα δείξουμε
$Na\subseteq aN$ (2). Έστω $b\in N$ και $a'=a^{-1}\in G$. Από (*)
$a'b(a')^{-1}=b'$ για κάποιο $b'\in N$
Άρα $ba=(a')^{-1}b'=ab\in aN$. Άρα $Na\subseteq aN$ (3)
Από (2) και (3) $aN=Na$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\phi: G_1\to G_2$ ομομ. ομάδων. Τότε
ο $\ker\phi$ είναι ΚΑΝΟΝΙΚΗ υποομάδα της G_1.
Απόδειξη Έστω $a\in G$, $b\in \ker\phi$. Από πρόταση αρκεί να
δείξουμε $aba^{-1}\in\ker\phi$. Έχουμε $\phi(aba^{-1})=\phi(a)\phi(b)$
$\cdot\phi(a^{-1})=(\phi(a))\cdot(\phi(a))^{-1}=e_{G_2}$ Άρα $aba^{-1}\in\ker\phi$

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν G αβελιανή ομάδα, τότε ΚΑΘΕ
υποομάδα H της G είναι κανονική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $a\in G$, $b\in H$. Τότε $aba^{-1}\underset{G\,\alpha\beta}{=}aa^{-1}b=$
$eb=b\in N$. Άρα από Πρόταση H κανονική υποομά-
δα της G.

Παράδειγμα Έστω $G=S_3$, $H=\langle(1,2)\rangle=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},(1,2)\right\}$

Το H είναι υποομάδα της G.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ H όχι κανονική υποομάδα της G

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $a=(1,2,3)\in G$ $b=(1,2)\in H$

Τότε $a\circ b\circ a^{-1}=(a(1),a(2))=(2,3)\notin H$

όπου χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση ότι αν $(a_1,\dots,a_r)\in S_n$ r-κύκλος και $\sigma\in S_n$, τότε $\sigma\circ(a_1,a_2,\dots a_r)\circ\sigma^{-1}=(\sigma(a_1),\sigma(a_2),\dots,\sigma(a_r))$

Άρα η S_3 έχει υποομάδα που δεν είναι κανονική.

Πρόταση Έστω $n\geq 2$. Τότε η υποομάδα A_n της S_n είναι κανονική και $[S_n A_n]=2$

Απόδειξη Έχουμε δει $|S_n|=n!$, $|A_n|=\frac{n!}{2}$

Άρα $[S_n A_n]=\frac{|S_n|}{|A_n|}=2$

Έστω $\varepsilon: S_n\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$ με $\varepsilon(\sigma)=$ πρόσημο της σ

Έχουμε δείξει ε ομομ. ομάδων και $A_n=\operatorname{Ker}\varepsilon$

Άρα από πρόταση που λέει ότι ο πυρήνας ομομορ. ομάδων είναι κανονική υποομάδα το αποτέλεσμα έπεται.

Θα δούμε: Αν N κανονική υποομάδα της G, ορίζουμε $*: G/N\times G/N\to G/N$ με $[a]*[b]=[a*b]$ και G/N ΟΜΑΔΑ (όπου $G/N=$ σύνολο αριστερών συμπλόκων της N στην G).

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω G ομάδα, N κανονική υποομάδα G/N το σύνολο των αριστερών πλευρικών κλάσεων της N στην G. Αν $a,a',b,b'\in G$ και $aN=a'N$ και $bN=b'N$. Τότε $abN=a'b'N$

(Υπενθύμιση $aN=\{ad: d\in N\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού $aN=a'N\Rightarrow$ υπάρχουν $n_1,n_2\in N$ με $an_1=a'n_2\Longrightarrow(a')^{-1}\cdot a\in N$

Ομοίως υπάρχουν $n_3, n_4 \in N$ με $bn_3 = b'n_4$
Αρκεί να δείξουμε $(a'b')^{-1} \cdot ab \in N$ (γιατί τότε $abN = a'b'N$)
Έχουμε $(a'b')^{-1} ab = (b')^{-1} \cdot (a')^{-1} \cdot ab =$
$((b')^{-1} \cdot (a')^{-1} \cdot a \cdot b') \cdot (b')^{-1} \cdot b$
Άλλα $(a')^{-1} \cdot a \in N$ και αφού N κανονική $(b')^{-1} \cdot (a')^{-1} \cdot a \cdot b'$
$\in N$ (2). Αφού $(b')^{-1} \cdot b \in N$ (3) από (2) και (3) $\Rightarrow$
$(a'b')^{-1} \cdot (ab) \in N$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω N κανονική υποομάδα της G. Στο σύνολο G/N ορίζουμε πράξη $* : G/N \times G/N \to G/N$ με $(aN)*(bN) = (ab)N$. Από την προηγούμενη Πρόταση η $*$ είναι καλά ορισμένη.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ. $(G/N, *)$ ΟΜΑΔΑ που λέγεται η ομάδα πηλίκο της G δια N

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ: $((aN)*(bN))*(cN) = (abN)*(cN) =$
$((ab)c) \cdot N \underset{G\,\text{προσ.}}{=} (a(bc))N = aN*((bc)N) = aN*((bN)*(cN))$

ΟΥΔΕΤΕΡΟ το $e_G N$, γιατί $(aN)*(e_G N) =$
$(ae_G)N = aN$
$(e_G N)*(aN) = (e_G a)N = aN$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ του aN το $a^{-1}N$, γιατί $(aN)*(a^{-1}N) =$
$(aa^{-1})N = e_G N$ και $(a^{-1}N)*(aN) = (a^{-1}a)N = e_G N$

ΕΡΩΤΗΜΑ Έστω N κανονική υποομάδα της G.
Τι μπορούμε να πούμε για την ομάδα $(G/N, *)$;

Πρόταση Έστω N κανονική υποομάδα της G με $|G| < \infty$. Τότε $\left|\frac{G}{N}\right| = \frac{|G|}{|N|}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ το έχουμε δει (και ισχύει και χωρίς την υπόθεση N κανονική).

Παράδειγμα Είδαμε A_n κανονική υποομάδα της S_n δείκτου 2. Άρα $\left|\frac{S_n}{A_n}\right| = 2$. Αλλά κάθε ομάδα με τάξη πρώτο p είναι κυκλική άρα ισόμορφη με το $\mathbb{Z}_p$.

Επομένως η ομάδα πηλίκο $\frac{S_n}{A_n}$ είναι ισόμορφη

με την $(\mathbb{Z}_2,+)$.

Πιο συγκεκριμένα $\frac{S_n}{A_n} = \{A_n, (1,2)A_n\}$ και

A_n είναι το ουδέτερο ενώ το $(1,2)A_n$ έχει

τάξη 2 γιατί $((1,2)A_n)*((1,2)A_n) = ((1,2)\circ(1,2))A_n = A_n$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω G αβελιανή ομάδα και H υποομάδα της G. Τότε η H είναι κανονική στην G και η ομάδα πηλίκο $(G/H, *)$ είναι αβελιανή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε δει ότι κάθε υποομάδα αβελιανής ομάδας είναι κανονική. Έστω $a,b \in G$

$(aH)*(bH) = (ab)\cdot H = (ba)H = (bH)*(aH)$. Άρα G/H αβελιανή.

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί N κανονική υποομάδα της G ώστε G όχι αβελιανή, αλλά $(G/N, *)$ αβελιανή.

Παράδειγμα 3 $n=3$ $G=S_3$ $N=A_3$ G όχι αβελ.

αλλά είδαμε G/N αβελιανή.

Πρόταση Έστω N κανονική υποομάδα της G. Ορίζουμε $\pi: G \to G/N$ με $\pi(a) = aN$

Τότε π επιμορφισμός ομάδων και $\ker\pi = N$.

Απόδειξη π ομομ. ομάδων $\pi(ab) = (ab)N = (aN)*(bN) = (\pi(a))*(\pi(b))$ π επι.

Αφού $G/N = \{aN : a \in G\}$ φανερά για $a \in G$

$aN = \pi(a)$. Άρα π επι.

ΘΕΩΡΗΜΑ (1ο Θεώρημα Ισομορφισμών). Έστω $\phi: G_1 \to G_2$ ομομ. ομάδων. Τότε οι ομάδες $G_1/\ker\phi$ και $\operatorname{Im}\phi = \phi(G_1)$ είναι ισόμορφες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ορίζουμε $\Psi: G_1/\ker\phi \to \operatorname{Im}\phi$ με

$T(a\ker\phi) = \phi(a)$

<u>ΙΣΧΥΡ.</u> : α) T καλά ορισμένη
β) T ισομορφ. ομάδων

<u>Απόδειξη</u> α) Έστω $a, a' \in G_1$ με $a\ker\phi = a'\ker\phi$
Τότε $(a')^{-1} \cdot a \in \ker\phi \Rightarrow$
$\phi((a')^{-1} \cdot a) = e_{G_2} \Rightarrow ((\phi(a'))^{-1} \cdot \phi(a) = e_{G_2} \Rightarrow \phi(a) = \phi(a')$
Άρα ϕ καλά ορισμένη.
β) T ομομορφισμός ομάδων $T((a\ker\phi) * (a'\ker\phi)) =$
$T(aa')\ker\phi = \phi(aa') = \phi(a) \cdot \phi(a') = T(a\ker\phi) * T(a'\ker\phi)$
T επί προφανές.
T 1-1. Έστω $a, a' \in G_1$ με $T(a\ker\phi) = T(a'\ker\phi) \Rightarrow$
$\phi(a) = \phi(a') \Rightarrow \phi((a')^{-1} \cdot a) = e_{G_2} \Rightarrow (a')^{-1} \cdot a \in \ker\phi$
$\Rightarrow a\ker\phi = a'\ker\phi$

<u>Πόρισμα.</u> Έστω $\phi: G_1 \to G_2$ επιμορφισμός ομάδων. Τότε οι ομάδες $G_1/\ker\phi$ και G_2 είναι ισόμορφες.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 2$ $H = \langle n \rangle = n\mathbb{Z}$ $=$ τα πολλαπλ. του n. Αφού $\mathbb{Z}$ αβελιανή η H είναι κανονική υποομάδα. Θεωρούμε την ϕ: $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_n, +)$ με $\phi(a) = [a]_n$. Τότε ϕ ΕΠΙΜΟΡΦΙΣΜΟΣ ομάδων (γιατί ϕ φανερά επί και $\phi(a+a') = [a+a']_n =$ $[a]_n + [a']_n = \phi(a) + \phi(a')$) και
$\ker\phi = \{a \in \mathbb{Z} : \phi(a) = 0_{\mathbb{Z}_n}\} = \{a \in \mathbb{Z}\ [a]_n = [0]_n\} =$
$\{a \in \mathbb{Z} : n \mid a\} = H$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ Από το πόρισμα η ομάδα πηλίκο $\mathbb{Z}/H$ είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{Z}_n, +)$.